

Übungsklausur Integralrechnung - Wasserbecken

Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) Bestimme die erste Ableitung.

a) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{x^2}$ b) $f(x) = \frac{4x^3 - 10x}{2}$

2) Bestimme eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = \sqrt{x} + 2\sin(x) - 3x^2$.

3) Löse die Gleichung $x^5 + 4x^3 - 5x = 0$.

4) Welchen Flächeninhalt schließt das Schaubild der Funktion $f(x) = -x^2 + x$ mit dem der Funktion $g(x) = 2x$ ein?

5) Abgebildet ist der Graph der Funktion F. Bestimme näherungsweise

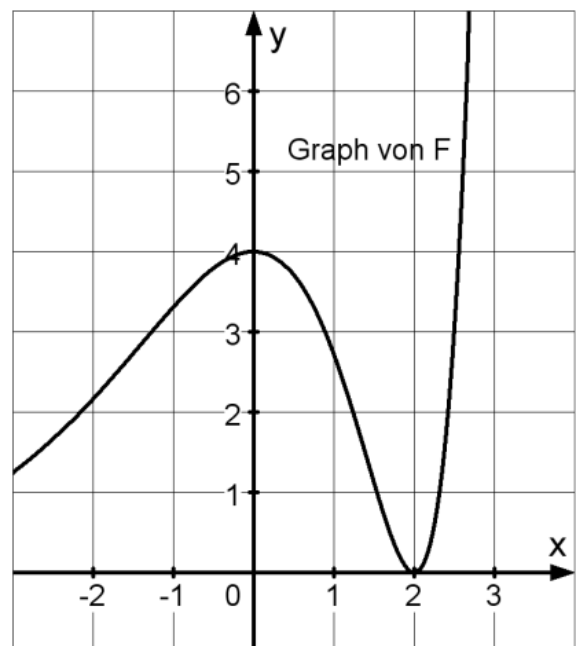
a) $F(-2)$.

b) $F'(1)$.

c) Die Lösungen von $F(x) = 2$.

d) $F(x)$ ist die Stammfunktion von $f(x)$.

Bestimme $\int_0^2 f(x) dx$.



Übungsklausur Integralrechnung - Wasserbecken

Wahlteil (mit WTR und Merkhilfe)

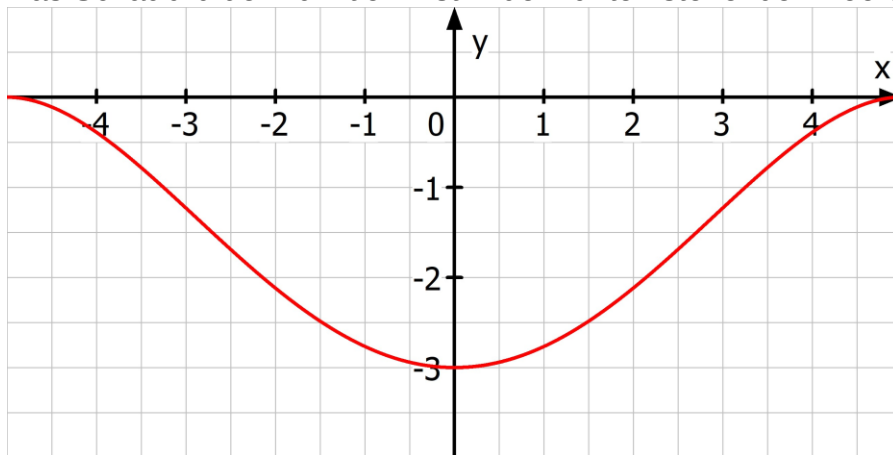
Der Querschnitt des Wasserbeckens eines Pumpspeicherkraftwerkes ist im Bereich $-5 \leq x \leq 5$ durch das Schaubild der Funktion

$$f(x) = -0,0048x^4 + 0,24x^2 - 3$$

(1LE entspricht 10m) gegeben.

Die Oberkante des Beckens verläuft entlang der x-Achse.

Das Schaubild der Funktion f ist in dem unten stehenden Koordinatensystem dargestellt.



- a) (1) Gib mit Hilfe des Schaubilds die Tiefe des Beckens und seine Breite an der Oberkante an.
(2) Berechne die steilste Stelle des Beckenbodens.

- b) (1) Berechne die Querschnittsfläche des Beckens.
(2) Das Becken hat eine Länge von 100m.
Bestimme das maximale Wasservolumen des gesamten Beckens in Kubikmetern.
(3) Am Abend ist der Wasserspiegel des Beckens 15m hoch über dem Grund.
Beschreibe ein Verfahren, wie das Wasservolumen im Becken bestimmt werden kann.

- c) Um 20:00Uhr befinden sich 52300m^3 Wasser im Becken.
Nun wird es mit billigem Nachtstrom vollgepumpt.
Dabei ist die Zuflussrate für $0 \leq t \leq 10$ durch

$$v(t) = -600 \cdot t^2 + 6000 \cdot t$$

(t in Stunden nach 20:00 Uhr, $v(t)$ in m^3 pro Stunde) gegeben.

- (1) Berechne, wie viel m^3 Wasser um 24:00 Uhr im Becken sind.
(2) Bestimme einen Funktionsterm für das Gesamtwasservolumen $V(t)$ des Beckeninhalts in Abhängigkeit der Zeit t .
(3) Das Becken fasst maximal 160000 m^3 Wasser. Zeige, dass es nicht überläuft.

Übungsklausur Integralrechnung - Wasserbecken

Lösungen Pflichtteil:

1) a) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 3x^{-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{6}{x^3}$

b) $f(x) = 2x^3 - 5x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 5$

2) $f(x) = x^{\frac{1}{2}} + 2\sin(x) - 3x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2\cos(x) - x^3$

3) $x^5 + 4x^3 - 5x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^4 + 4x^2 - 5) = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 0}$

oder $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$

Subst.: $u = x^2 \quad u^2 + 4u - 5 = 0 \Leftrightarrow u_{\frac{1}{2}} = -2 \pm \sqrt{4+5} = -2 \pm 3 \quad u_1 = 1; u_2 = -5$

Rücksubst.: $x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x_{2/3} = \pm 1} \quad x^2 = -5 \quad \text{k.L.}$

4) (1) Schnittpunkte: $-x^2 + x = 2x \Leftrightarrow -x \cdot (x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = -1$

(2) Flächeninhalt: $A = \int_{-1}^0 -x^2 + x - 2x dx = \int_{-1}^0 -x^2 - x dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0$
 $= 0 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = -\left(\frac{2}{6} - \frac{3}{6} \right) = \boxed{\frac{1}{6}}$

5) a) $F(-2) \approx 2,2$

b) $F'(1) \approx -2$

c) $x_1 \approx -2,1; x_2 \approx 1,3; x_3 \approx 2,4$

d) $\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0) = 0 - 4 = -4$

Übungsklausur Integralrechnung - Wasserbecken

Lösungen Wahlteil:

a) (1) Tiefpunkt: $T(0|-3) \Rightarrow \boxed{\text{Tiefe} = 30\text{m}}$

Abstand der Nullstellen von $f(x)$: $N_1(-5|0); N_2(5|0) \Rightarrow \boxed{\text{Breite} = 100\text{m}}$

(2) An der Wendestelle ist die Steigung des Beckenbodens extremal.

$$f'(x) = -0,0192x^3 + 0,48x \quad f''(x) = -0,0576x^2 + 0,48$$

Bestimme die Wendestelle(n):

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -0,0576x^2 + 0,48 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8,333 \Rightarrow x_{\frac{1}{2}} = \pm 2,887$$

Bestimme die Steigung an der Wendestelle:

$$f'(2,887) \approx -0,0192 \cdot 2,887^3 + 0,48 \cdot 2,887 \approx 0,924 \Rightarrow \text{Maximale Steigung von } \boxed{0,924}$$

b) (1) $\int_{-5}^5 \text{ obere Funktion} - \text{ untere Funktion} \, dx = \int_{-5}^5 0 - (-0,0048x^4 + 0,24x^2 - 3) \, dx =$

$$\int_{-5}^5 0,0048x^4 - 0,24x^2 + 3 \, dx = \left[0,00096x^5 - 0,08x^3 + 3x \right]_{-5}^5$$

$$= 0,00096 \cdot 5^5 - 0,08 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5 - (0,00096 \cdot (-5)^5 - 0,08 \cdot (-5)^3 + 3 \cdot (-5))$$

$$= 8 - (-8) = 16 \Rightarrow \boxed{1600\text{m}^2}$$

(2) $V = 1600\text{m}^2 \cdot 100\text{m} = \boxed{160.000\text{m}^3}$

(3) 1) Bestimme die Breite des Beckens über die Schnittstellen von $y = -1,5$ (Wasserspiegel) mit dem Beckenboden $f(x)$: x_1, x_2

2) Berechne die Querschnittsfläche des Wassers im Becken: $A = \int_{x_1}^{x_2} -1,5 - f(x) \, dx \cdot 100$
($\cdot 100$ wegen des Maßstabs)

3) Berechne das Volumen des Wassers: $V = A \cdot 100$

c) (1) $V_{24\text{Uhr}} = 52.300 + \int_0^4 v(t) \, dt = 52.300 + \int_0^4 -600 \cdot t^2 + 6000 \cdot t \, dt$

$$= 52.300 + \left[-200t^3 + 3000t^2 \right]_0^4 = 52.300 - 200 \cdot 4^3 + 3000 \cdot 4^2 = 87.500 \Rightarrow \boxed{87.500\text{m}^3}$$

(oder $V(4)$ über Aufgabe c) (2))

(2) $V(t) = -200t^3 + 3000t^2 + 52.300$

(3) Maximum von $V(t)$:

$$V'(t) = 0 \Leftrightarrow v(t) = 0 \Leftrightarrow -600 \cdot t^2 + 6000 \cdot t = 0 \Leftrightarrow t \cdot (-600 \cdot t + 6000) = 0$$

$$\Rightarrow (t_1 = 0) \text{ oder } t_2 = 10 \quad V(10) = 152.300$$

$$\Rightarrow \boxed{H(10|152.300)}$$

Da $152.300\text{m}^3 < 160.000\text{m}^3$ läuft das Becken nicht über.